

Les nombres rationnels

I. Généralités

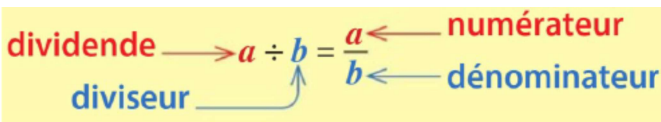
a) Définition

Définition : Soient a et b deux nombres entiers relatifs avec $b \neq 0$.

Alors le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b , donne a .

On le note $a : b$, $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$; on dit qu'il s'agit d'un **nombre rationnel**.

- Si a et b sont des entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction**.

Rappel : 

Exemples : * $\frac{324}{100} = 3,24$ donc un nombre rationnel peut être décimal

* $\frac{21}{3} = 7$ donc un nombre rationnel peut être entier

* $\frac{11}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est ni entier ni décimal ;

on peut en donner une valeur approchée décimale avec la calculatrice soit $\approx 3,67$.

Rappel : Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'une **fraction décimale** (c'est-à-dire dont le numérateur est un entier et le dénominateur est 1 ou 10 ou 100 ou 1000 ou 10000 ou etc.)

b) Fractions égales

Propriété : Un nombre en écriture fractionnaire ne change pas quand on multiplie (ou divise) son numérateur ET son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m}$$

Exemple : $\frac{12}{9} = \frac{12 \times 4}{9 \times 4} = \frac{48}{36}$ $\frac{12}{9} = \frac{12 \div 3}{9 \div 3} = \frac{4}{3}$ On a : $\frac{4}{3} = \frac{12}{9} = \frac{48}{36}$

Définition : ♦ **Simplifier** une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petit.

- ♦ Quand on ne peut plus simplifier, on dit que la fraction est **irréductible**.

Exemple : $\frac{32}{48} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{2}{3}$

Remarque : Lorsque le numérateur et/ou le dénominateur sont des nombres décimaux, il faut d'abord les rendre entiers en multipliant par 10 ou 100 ou 1000 etc...

Exemple : $\frac{4,5}{1,25} = \frac{4,5 \times 100}{1,25 \times 100} = \frac{450}{125} = \frac{2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{18}{5}$

c) Proportion

Définition : Une proportion est un rapport entre deux grandeurs.

Exemple : Dans la classe il y a 18 filles sur un total de 30 élèves.

La proportion de fille est : $\frac{\text{nombre de filles}}{\text{total des élèves}} = \frac{18}{30}$

Propriété :

Pour multiplier une fraction par un nombre :

- On multiplie le numérateur
- On garde le dénominateur

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$$

Exemple : $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour calculer une fraction d'une grandeur :

Ex : Les $\frac{2}{3}$ d'une bouteille de 75 cL :

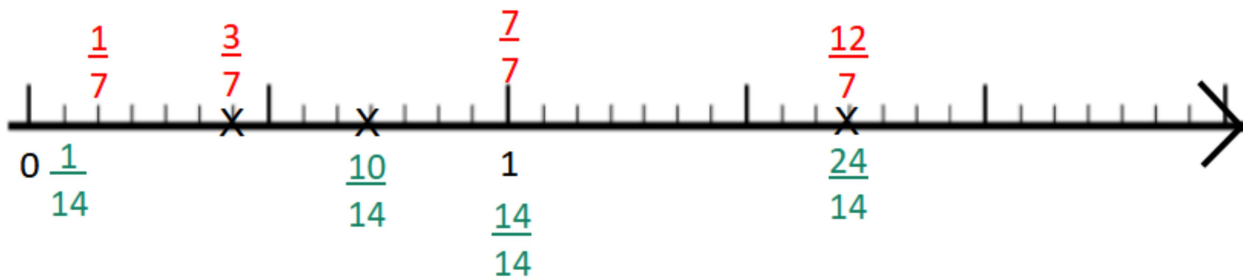
$$\frac{2}{3} \times 75 = \frac{2 \times 75}{3} = \frac{150}{3} = 50$$

Les deux tiers de 75 cL représentent 50 cL.

II. Repérage sur une droite graduée

Méthode : Pour repérer la fraction $\frac{a}{b}$ sur une droite graduée, on partage l'unité en b segments de même longueur, puis on reporte a fois cette longueur à partir de l'origine.

Exemples : Placer $\frac{3}{7}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{10}{14}$; $\frac{24}{14}$



III. Comparaison de fractions

a) Avec le même dénominateur

Règle : Si deux fractions ont le même dénominateur, alors on compare les numérateurs : la plus grande fraction est celle qui a le plus grand numérateur.

Exemple : $\frac{5}{6} < \frac{12}{6}$ car $5 < 12$

b) Dénominateur différent

Règle : Si deux fractions n'ont pas le même dénominateur, alors on les réduit au même dénominateur et on applique la règle précédente.

Exemple : Comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{11}{15}$.

On réduit au même dénominateur : ici 15

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$ les deux fractions ont le même dénominateur.

On doit comparer $\frac{9}{15}$ et $\frac{11}{15}$. $9 < 11$ donc $\frac{9}{15} < \frac{11}{15}$.

c) Avec le même numérateur

Règle : Si deux fractions ont le même numérateur, alors on compare les dénominateurs : la plus grande fraction a le plus petit dénominateur.

Exemple : $\frac{5}{6} < \frac{5}{3}$ car $6 > 3$

d) Comparaison avec 1

Propriété :

a et b désignent des nombres ($b \neq 0$)

- Si $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$
- Si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$
- Si $a = b$ alors $\frac{a}{b} = 1$

Exemple : Comparer $1; \frac{3}{5}; \frac{8}{7}$

$3 < 5$ donc $\frac{3}{5} < 1$ et $8 > 7$ donc $\frac{8}{7} > 1$.

Donc $\frac{3}{5} < 1 < \frac{8}{7}$.

IV. Calculer avec des fractions

a) Additionner et soustraire

Propriété 1 :

Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire **qui ont le même dénominateur** :

- on additionne ou on soustrait les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

Exemples :

$$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}$$

$$A = \frac{2+4}{5}$$

$$B = \frac{7-5}{3}$$

$$A = \frac{6}{5}$$

$$B = \frac{2}{3}$$

Propriété 2 : Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire **qui n'ont pas le même dénominateur**, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Exemples :

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

On écrit les deux fractions avec pour dénominateur 4.

$$D = \frac{4}{3} - \frac{5}{12}$$

On écrit les deux fractions avec pour dénominateur 12.

$$C = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} - \frac{5}{12}$$

$$C = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{16}{12} - \frac{5}{12}$$

$$C = \frac{3}{4}$$

$$D = \frac{11}{12}$$

b) Multiplication (4ème)

Propriété : Pour calculer le produit de deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en respectant la règle des signes.

Si a, b, c , et d désignent 4 nombres avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemple : $\frac{4}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{7 \times 3} = \frac{20}{21}$

Remarques :

1) Prendre une fraction d'un nombre revient à multiplier cette fraction par ce nombre.

Exemples : $\frac{-3}{4} \times 8 \times \frac{7}{9} = \frac{-3 \times 2 \times 4 \times 7}{4 \times 3 \times 3} = \frac{-14}{3}$

2) Lorsque l'on multiplie deux fractions, il faut penser à simplifier avant d'effectuer !
Le résultat doit être irréductible.

Exemple : $\frac{-63}{25} \times \frac{40}{-81} = \frac{63 \times 40}{25 \times 81} = \frac{7 \times 9 \times 5 \times 8}{5 \times 5 \times 9 \times 9} = \frac{56}{45}$

c) Inverse (4ème)

Définition : Deux nombres relatifs dont le produit est égal à 1 sont **inverses** :

- Si $a \times b = 1$, alors a est l'inverse de b
 b est l'inverse de a .
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors l'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$
- L'inverse d'un nombre a non nul se note $\frac{1}{a}$

⚠ Il ne faut pas confondre **inverse** et **opposé** !

L'opposé de a est $-a$. L'inverse de $\frac{4}{3}$ est $\frac{3}{4}$, l'opposé de $\frac{4}{3}$ est $-\frac{4}{3}$ 0 n'a pas d'inverse !

d) Division (4ème)

Propriété : Diviser par un nombre rationnel non nul revient à multiplier par son inverse.

Si a, b, c , et d désignent 4 nombres avec $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$, alors : $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Exemples : $\frac{-11}{2} \div \frac{-8}{1} = \frac{-11}{2} \times \frac{-1}{8} = \frac{11 \times 1}{2 \times 8} = \frac{11}{16}$; $\frac{\frac{7}{30}}{\frac{-21}{25}} = \frac{7}{30} \times \frac{-25}{21} = \frac{-7 \times 25}{30 \times 21} = \frac{-7 \times 5 \times 5}{6 \times 5 \times 7 \times 3} = \frac{-5}{18}$

V. Calcul avec les quatre opérations (4ème)

$$\bullet \frac{5}{3} \div \left(\frac{5}{6} - \frac{8}{9} \right) = \frac{5}{3} \div \left(\frac{15}{18} - \frac{16}{18} \right) = \frac{5}{3} \div \frac{-1}{18} = \frac{5}{3} \times \frac{18}{-1} = -\frac{5 \times 18}{3 \times 1} = -\frac{5 \times 6 \times 3}{3 \times 1} = -30$$

$$\bullet \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{5}{6} + \frac{-7}{9}} \times \frac{\frac{2}{3} - \frac{-5}{2}}{\frac{4}{3} + 5} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{6}{2}}{\frac{15}{18} + \frac{-14}{18}} \times \frac{\frac{4}{6} - \frac{-15}{6}}{\frac{4}{3} + \frac{15}{3}} = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{1}{18}} \times \frac{\frac{19}{6}}{\frac{19}{3}} = \frac{-5}{2} \times \frac{18}{1} \times \frac{19}{6} \times \frac{3}{19} = -\frac{5 \times 18 \times 19 \times 3}{2 \times 1 \times 6 \times 19}$$

$$= -\frac{5 \times 3 \times 6 \times 19 \times 3}{2 \times 1 \times 6 \times 19} = -\frac{5 \times 3 \times 3}{2 \times 1} = -\frac{45}{2}$$